$I_k = \int_0^1 x^k\sqrt{1-x}\,dx \quad , \quad k \geq 1$

On pose : $U(x) = xk \Rightarrow U'(x) = kx^{k-1}$

$V'(x) = \sqrt{1-x}$ et $V(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$

Donc $I_k = \left[\frac{2}{3}x^k(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2k}{3}\int_0^1 x^{k-1}\sqrt{1-x}dx -$

$$\frac{2k}{3}\int_0^1 x^k\sqrt{1-x}\,dx$$

Donc $I_k = -\frac{2k}{3}I_k + \frac{2k}{3}I_{k-1}$

Par suite $(\frac{2k}{3}+1)I_k = \frac{2k}{3}I_{k-1} \Rightarrow Ik = \frac{2k}{2k+3}I_{k-1}$

$I_k = \frac{2k}{2k+3}I_{k-1}$

$I_{k-1} = \frac{2(k-1)}{2k+1}I_{k-2}$

$I_{k-2} = \frac{2(k-2)}{2k-1}I_{k-3}$

.

.

$I_1 = \frac{2}{5}.\frac{2}{3}$

Multipliant membre à membre les k inégalités

On aura : $Ik = \frac{2^{k+1}k!}{3.5\ldots(2k+3)} = \frac{(2.4\ldots2k).(2k+2)2^{k-1}k!}{2.3.4.5\ldots..(2k+2)(2k+3)}$

$I_k = \frac{2^{2k+2}(k+1)!}{(2k+3)!}$

b) $I_k > 0$ et $I_k = \frac{2k}{(2k+3)}I_{k-1} < I_{k-1}$ Car $\frac{2k}{2k+3} < 1$

donc la suite (I_k) est décroissante

(Ik) est décroissante , minorée par 0 donc (Ik) est convergente.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn